E.N.I. TRAVAUX RURAUX STRASBOURG 1976
Option "Physique-Mathématiques"

MATHEMATIQUES II (3 h)

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$ dont les vecteurs unitaires sont $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

I

a et b étant deux nombres réels positifs donnés, on considère le système d'équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\theta} = -y \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{b}{a} z \qquad \frac{dz}{d\theta} = -\frac{a}{b} y$$

où θ désigne une variable réelle.

1° Donner l'expression générale des solutions réelles du système (1) (on pourra d'abord intégrer le système formé par les deux dernières équations). Déterminer en particulier la solution $(x_1(\theta), y_1(\theta), z_1(\theta))$ qui satisfait aux conditions initiales suivantes : pour $\theta = 0$,

$$x_1(0) = b \qquad y_1(0) = 0 \qquad z_1(0) = a \ .$$

2° A toute solution $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ du système (1), on associe la courbe C de l'espace décrite, lorsque θ varie, par le point $M(\theta)$ de coordonnées $x(\theta)$, $y(\theta)$, $z(\theta)$.

a. Montrer que la courbe C_1 correspondant à la solution particulière $(x_1(\theta), y_1(\theta), z_1(\theta))$ est une conique à centre dont on précisera la nature et la mesure des axes.

b. Montrer que les courbes C se déduisent de la courbe C_1 par une similitude.

II

a étant un nombre réel strictement positif donné, à tout réel θ on associe la droite D_θ ayant pour équations paramétriques :

$$x = \lambda a \cos\theta \qquad y = \lambda a \sin\theta \qquad z = a \cos\theta$$

(dans lesquelles a et θ sont donc constants et λ variable).

1° Montrer que pour toute valeur de θ, la droite D_θ est tangente à deux sphères fixes, centrées sur l'axe Ox, dont on déterminera le centre et le rayon. On appelle S celle de ces deux sphères dont le centre a une abscisse positive.

2° Déterminer les coordonnées du point de contact B de la droite D_θ avec la sphère S. Construire les projections sur les plans de coordonnées de la courbe décrite par le point B lorsque θ varie.

III

On considère un repère orthonormé BXYZ, de vecteurs unitaires $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$, tel que : B est le point de la droite D_θ, défini précédemment; l'axe BX est porté par la droite D_θ, son vecteur unitaire $\vec{I}$ ayant pour composantes $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$; l'axe BZ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et a même sens que lui, A désignant le point de coordonnées $(a, 0, 0)$; l'axe BY, enfin, est tel que le repère BXYZ soit direct.

1° Déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Écrire les formules de changement de repère donnant les coordonnées (x, y, z) d'un point M dans le repère $Oxyz$ en fonction de ses coordonnées (X, Y, Z) dans le repère BXYZ.

2° Montrer que, pour toute valeur de θ, la droite BY coupe une droite fixe située dans le plan Oxz ou bien lui est parallèle.

3° Le repère BXYZ est considéré comme un solide en mouvement par rapport au repère $Oxyz$. On suppose que θ est une fonction dérivable du temps t (on pourra poser $\frac{d\theta}{dt} = \omega$).

a. Déterminer le vecteur rotation à l'instant t par ses composantes dans le repère fixe $Oxyz$.

b. Déterminer l'axe instantané de rotation et de glissement Δ (c'est-à-dire l'axe central du torseur des vitesses) par ses équations dans le repère fixe. Montrer que la droite Δ passe par un point fixe.

IV

L'axe Δ décrit un cône Γ lorsque θ varie.

1° Déterminer l'intersection de ce cône avec la sphère S déterminée à la question (II, 1°). Que peut-on dire de ce cône Γ ?

2° Calculer le volume de la portion d'espace intérieure à la sphère S et au cône Γ et située du côté des $z \geqslant 0$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail